Ueber die

Bewegung dreier Punkte in gerader Linie,

welche sich mit einer Kraft anziehen, die umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung wirkt.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

in der

Philosophie,

vorgelegt der philosophischen Facultät

der

Universität zu Rostock

im Februar 1870

von

Carl Hoppe

aus Stolp in Pommern.

1870.

Druck von F. W. Feige in Stolp.

Bewegung dreier Punkte in gerader Linie,

welche sich mit einer Kraft anziehen, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirkt.

Seit 1747, wo Clairaut und d'Alembert der Akademie der Wissenschaften zu Paris ihre Auflösung des „Problems der drei Körper" übergaben, ist dies als einer der wichtigsten Gegenstände der Mechanik und der mathematischen Analysis zugleich, mehr oder weniger eine Aufgabe geworden, in der jeder der grössten Mathematiker dieses und des verflossenen Jahrhunderts ein weiteres Ziel als seine Vorgänger erreichen wollte.

Anfänglich bestand dies Problem in der Bestimmung der Störungen, welche die Anziehung der Sonne in der Bewegung des Mondes um die Erde hervorbringt. Bald darauf wurde es auf die Störungen angewendet, die jeder Planet in seiner Bewegung um die Sonne von einem andern Planeten erleidet.

Allgemein betrachtet soll es die Bestimmung der Bewegung von drei Körpern enthalten, die sich gegenseitig im Verhältniss ihrer Massen und im umgekehrten Verhältniss der Quadrate ihrer Entfernungen anziehen, und in dieser Gestalt ist es ein rein mechanisches Problem geworden.

Wir betrachten im vorliegenden, speciellen Falle „die Bewegung dreier, (materieller), Punkte in gerader Linie, die sich im umgekehrten Verhältniss der Cuben der Entfernung anziehen."

Bezeichnen wir die Entfernungen der drei Punkte mit der Masse je gleich 1 zur Zeit t vom Schwerpunkte mit ξ_1, ξ_2, ξ_3, so gilt bekanntlich:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0. \tag{1}$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -\frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{1}{(\xi_3 - \xi_2)^3} \tag{3}$$

$$\frac{d^2\xi_3}{dt^2} = -\frac{1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} - \frac{1}{(\xi_3 - \xi_2)^3}, \tag{4}$$

wo wir:

$$\xi_3 > \xi_2 > \xi_1$$

voraussetzen.

Führen wir für das Integral derjenigen Function, welche die zwischen zwei Punkten wirkende Anziehung ausdrückt, folgende Werthe ein:

$$\int \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)^3}(d\xi_2 - d\xi_1) = P_{1.2}$$

$$\int \frac{1}{(\xi_3 - \xi_2)^3}(d\xi_3 - d\xi_2) = P_{2.3}$$

$$\int \frac{1}{(\xi_3 - \xi_1)^3}(d\xi_3 - d\xi_1) = P_{1.3},$$

so ergiebt sich:

$$P_{1.2} + P_{1.3} + P_{2.3} =$$

$$-\frac{1}{2(\xi_2 - \xi_1)^2} - \frac{1}{2(\xi_3 - \xi_1)^2} - \frac{1}{2(\xi_3 - \xi_2)^2}, \tag{5}$$

wofür wir „$-U$“ setzen wollen.

Dies, in die obigen Bewegungsgleichungen substituirt, bewirkt folgende Aenderung:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \tag{6}$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\xi_3}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_3}, \tag{8}$$

welche Gleichungen bezüglich mit $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$ multiplicirt, und alsdann addirt, liefern:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_1}{dt^2}d\xi_1 + \frac{d^2\xi_2}{dt^2}d\xi_2 + \frac{d^2\xi_3}{dt^2}d\xi_3 \\ &= \frac{\partial U}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial U}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \frac{\partial U}{\partial \xi_3}d\xi_3 \\ &= dU, \end{aligned}\right.$$

oder integrirt und:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_3}{dt}\right)^2 = T \text{ gesetzt:} \\ &U + h = T. \end{aligned}\right.$$

Um die Constante der Integration h zu bestimmen, setzen wir die Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$

für Punkt (1) $= v_1$,
„ „ (2) $= v_2$,
„ „ (3) $= v_3$,

und die anfänglichen Entfernungen vom Schwerpunkte bezüglich gleich l_1, l_2, l_3;

alsdann ergiebt die Substitution dieser Werthe in (10),

$$(11)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma v^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{(l_2 - l_1)^2} + \frac{1}{(l_3 - l_1)^2} + \frac{1}{(l_3 - l_2)^2}\right) + h,$$

und damit ist h bestimmt.

Lassen wir den Schwerpunkt in Ruhe, heben damit also die Anfangs-Geschwindigkeit der 3 Punkte auf, so wird $\Sigma v^2 = 0$, und

$$(12)\quad h = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{(l_2 - l_1)^2} + \frac{1}{(l_3 - l_1)^2} + \frac{1}{(l_3 - l_2)^2}\right).$$

Haben v_1, v_2, v_3 zur Zeit $t = 0$ von 0 verschiedene Werthe, so wird sich auch der Schwerpunkt bewegen, und dann wird es nöthig, wenn wir die Entfernungen vom Schwerpunkte als massgebend annehmen wollen, die Entfernungen des Schwerpunktes von einem festen Punkte in Rechnung zu bringen, indem wir zu den ξ die Coordinate des Schwerpunktes y hinzubringen und daraus und aus der Gleichung, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, die Werthe zur Anfangszeit bestimmen.

(Auch dieser Fall ist von mir betrachtet und bis zur Quadratur geführt.)

Hier betrachten wir den Fall, wo der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, also

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

wird; und werden nur kurz auch ein Bild der Bewegung zu geben suchen, wenn dies nicht vorausgesetzt wird.

Führen wir an dieser Stelle für die 3 Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_3 nach Jacobi's Vorgange (S. Crelle 26) die beiden Variablen x und x_1 durch folgende Gleichungen ein:

$$(13)\quad \begin{cases} \xi_1 = a_1 x + b_1 x_1 \\ \xi_2 = a_2 x + b_2 x_1 \\ \xi_3 = a_3 x + b_3 x_1, \end{cases}$$

so gelten für die 6 in diesen 3 Gleichungen enthaltenen Constanten die beiden Bedingungen:

$$(14)\quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe für ξ_1, ξ_2, ξ_3 verwandelt sich:

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\xi_3}{dt}\right)^2 \qquad (11)$$

in $2T =$

$$(15)\quad \begin{cases} \left(a_1\frac{dx}{dt} + b_1\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \\ \left(a_2\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \\ \left(a_3\frac{dx}{dt} + b_3\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\frac{dx^2}{dt^2} + \\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\frac{dx_1^2}{dt^2} + \\ \{2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3\}\frac{dx}{dt}\frac{dx_1}{dt}. \end{cases}$$

Setzen wir:

$$(16)\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mu,$$

$$(17)\quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \mu_1,$$

$$(18)\quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2 = 0, \text{ so ist}$$

$$2T = \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2. \tag{19}$$

U, welches sich früher in der Form:

$$\frac{1}{2(\xi_2-\xi_1)^2} + \frac{1}{2(\xi_3-\xi_2)^2} + \frac{1}{2(\xi_3-\xi_1)^2}$$

darstellte, ist jetzt: =

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\{x(a_1-a_2)+(b_1-b_2)x_1\}^2} + \\ \dfrac{1}{2\{x(a_2-a_3)+(b_2-b_3)x_1\}^2} + \\ \dfrac{1}{2\{x(a_3-a_1)+(b_3-b_1)x_1\}^2} \end{array}\right. \tag{20}$$

Setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1-a_2=\gamma_1\ ;\ b_1-b_2=\delta_1, \\ a_2-a_3=\gamma_2\ ;\ b_2-b_3=\delta_2, \\ a_3-a_1=\gamma_3\ ;\ b_3-b_1=\delta_3; \end{array}\right. \tag{21}$$

(22) so dass $\Sigma\gamma = 0$ und $\Sigma\delta = 0$,

so ist:

$$\left\{\begin{array}{l} 2U = \\ \dfrac{1}{(\gamma_1 x+\delta_1 x_1)^2} + \dfrac{1}{(\gamma_2 x+\delta_2 x_1)^2} + \dfrac{1}{(\gamma_3 x+\delta_3 x_1)^2}. \end{array}\right. \tag{23}$$

Es war $T = U + h$ (S. 10),

also $2T = 2U + 2h$, d. i.

$$\left\{\begin{array}{l} \mu\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\dfrac{dx_1}{dt}\right)^2 = \\ \dfrac{1}{(\gamma_1 x+\delta_1 x_1)^2} + \dfrac{1}{(\gamma_2 x+\delta_2 x_1)^2} + \dfrac{1}{(\gamma_3 x+\delta_3 x_1)^2} + 2h; \end{array}\right. \tag{24}$$

h bestimmte sich, wenn wir die Anfangspositionen entsprechend $= l_1, l_2, l_3$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $= 0$ festsetzten, =

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{(l_2-l_1)^2} + \frac{1}{(l_3-l_1)^2} + \frac{1}{(l_3-l_2)^2}\right),$$

welchen Werth wir als bekannt ansehen wollen. Aus (24) ergiebt die Differentiation:

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &2\mu\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + 2\mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_1}{dt} = \\ &-\frac{2\gamma_1\frac{dx}{dt} + \delta_1\frac{dx_1}{dt}}{(\gamma_1 x + \delta_1 x_1)^3} - \frac{2\gamma_2\frac{dx}{dt} + \delta_2\frac{dx_1}{dt}}{(\gamma_2 x + \delta_2 x_1)^3} \\ &-\frac{2\gamma_3\frac{dx}{dt} + \delta_3\frac{dx_1}{dt}}{(\gamma_3 x + \delta_3 x_1)^3}, \end{aligned} \right.$$

oder zerfällt:

$$(26)\qquad \mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma\frac{\gamma}{(\gamma x + \delta x_1)^3} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(27)\qquad \mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{\delta}{(\gamma x + \delta x_1)^3} = \frac{\partial U}{\partial x_1},$$

wo Σ bedeutet, dass die γ und δ von γ_1 bis γ_3 und δ_1 bis δ_3 zu nehmen sind.

Multipliciren wir Gl. 26 mit x, Gl. 27 mit x_1, so ergiebt die Addition, wie leicht ersichtlich:

$$(28)\qquad \mu x\frac{d^2x}{dt^2} + \mu_1 x_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2U.$$

Bilden wir:

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2(\mu x^2 + \mu_1 x_1^2)}{dt^2}, \\ &\text{so folgt zunächst durch einmalige Differentiation:} \\ &= \frac{d\left(2\mu x\frac{dx}{dt} + 2\mu_1 x_1\frac{dx_1}{dt}\right)}{dt} \end{aligned} \right.$$

und weiter

$$= 2\mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2\mu x\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu_1 x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}.$$

Hierin sind die beiden ersten Glieder $= 4T = 4(U + h)$, die beiden letzten $= -4U$, so dass

$$(30)\qquad \frac{d^2(\mu x^2 + \mu_1 x_1^2)}{dt^2} = 4h$$

wird.

Statt also aus:

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma \frac{\gamma}{(\gamma x + \delta x_1)^3} \text{ und}$$

$$\mu_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\Sigma \frac{\delta}{(\gamma x + \delta x_1)^3}$$

x und x_1 als Functionen der Zeit zu bestimmen, werden wir uns geeigneter der Gleichungen:

$$\mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \Sigma \frac{1}{(\gamma x + \delta x_1)^2} + 2h,$$

$$\frac{d^2(\mu x^2 + \mu_1 x_1^2)}{dt^2} = 4h$$

bedienen.

a und b werden durch γ und δ ausgedrückt mittels der Formeln (21) und bestimmen sich, wie folgt:

$$(31)\left\{\begin{array}{l} 3a_1 = \gamma_1 - \gamma_3 \;;\; 3b_1 = \delta_1 - \delta_3, \\ 3a_2 = \gamma_2 - \gamma_1 \;;\; 3b_2 = \delta_2 - \delta_1, \\ 3a_3 = \gamma_3 - \gamma_2 \;;\; 3b_3 = \delta_3 - \delta_2. \end{array}\right.$$

Ebenso sind für die μ und μ_1 die δ und γ zu setzen, und zwar findet sich μ aus $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ wie folgt:

$$\left.\begin{array}{r} 9a_1^2 = \gamma_1^2 + \gamma_3^2 - 2\gamma_1\gamma_3 \\ +\,9a_2^2 = +\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 \\ +\,9a_3^2 = +\gamma_3^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3 \end{array}\right\} = 9\mu =$$

$$2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - 2(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)$$

$$= 3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$
$$- \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$
$$- \gamma_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3),$$

also nach (22) $= 3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$ und

(32) $3\mu = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$; ebenso ergiebt sich

(33) $3\mu_1 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2$ und

(34) $\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = 0$, wenn wir in

$3\mu_1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ und

$0 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

für a und b ihre Werthe, in γ und δ ausgedrückt, einsetzen.

Wir haben mithin für die Bestimmung der eingeführten Constanten folgende 6 Gleichungen:

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \\ \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = 0. \end{array}\right.$$

Die Constanten sind nicht vollständig durch dieselben bestimmbar, und es wird darauf ankommen, für sie solche Annahmen zu machen, dass die angegebenen Bedingungen auch wirklich erfüllt sind. 3 Constante werden willkürlich genommen werden können.

(36) Nehmen wir z. B. $\delta_1 = 0$, $\delta_3 = 1$, $\gamma_1 = -2$, so bestimmen sich aus (35)

$$\delta_2 = -1,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 1$$

und aus (31)

$$a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 0;$$
$$b_1 = -\tfrac{1}{3};\ b_2 = -\tfrac{1}{3};\ b_3 = \tfrac{2}{3},$$

welche die Bedingungen $\Sigma a = \Sigma b = \Sigma\gamma = \Sigma\delta = 0$ und

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0;$$
$$\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = 0$$ erfüllen.

Daraus ergeben sich auch für μ und μ_1 bestimmte Werthe, und zwar $\mu = 2$; $\mu_1 = \frac{2}{3}$; die Substitution dieser Werthe in (24) und (30) ergiebt:

$$(37\,a)\qquad 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x + x_1)^2} + 2h$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2x_1^2 + x_1^4 + 8x^4 + 8x^2x_1^2}{4x^2(x^2 - x_1^2)^2} + 2h$$

$$= \frac{9x^4 + 6x^2x_1^2 + x_1^4}{4x^2(x^2 - x_1^2)^2} + 2h$$

$$(37)\qquad = \frac{(3x^2 + x_1^2)^2}{4x^2(x^2 - x_1^2)^2} + 2h.$$

Ebenso ändert die zweite Differentialgleichung (30) sich, und wir haben also folgende beide Gleichungen als Lösun-

gen der Aufgabe über die Bewegung dreier Punkte u. s. w. in gerader Linie:

$$(37) \qquad 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \frac{(3x^2 + x_1^2)^2}{4x^2(x^2 - x_1^2)^2} + 2h$$

$$(38) \text{ und} \qquad \frac{d^2(2x^2 + \tfrac{2}{3}x_1^2)}{dt^2} = 4h.$$

Die einmalige Differentiation von $ff(38)$ ergiebt [besser: die einmalige Integration von (38)]:

$$(39) \qquad 4x\left(\frac{dx}{dt}\right) + \tfrac{4}{3}x_1\frac{dx_1}{dt} = 4ht + c.$$

Zur Zeit $t = 0$ war nach unserer Annahme $\frac{d\xi_1}{dt} = 0$ etc., d. h. der Schwerpnnkt in Ruhe: mithin

$$a_1\frac{dx}{dt} + b_1\frac{dx_1}{dt} = 0,$$

und da weder a_1 noch b_1 verschwindet, und beide negativ, so muss:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = 0$$

uud folglich auch $c = 0$: und

$$(40) \qquad 4x\frac{dx}{dt} + \tfrac{4}{3}x_1\frac{dx_1}{dt} = 4ht, \text{ oder}$$

$$(41) \qquad x\frac{dx}{dt} + \tfrac{1}{3}x\frac{dx_1}{dt} = ht \text{ sein.}$$

Integriren wir (40), so erhalten wir:

$$(42) \qquad 2x^2 + \frac{2x_1^2}{3} 2ht^2 + c_1.$$

Die Constante c_1 bestimmt sich, wenn wir zur Zeit $t = 0$, wie vorhin:

$$\xi_1 = l_1,$$
$$\xi_2 = l_2,$$
$$\xi_3 = l_3,$$

setzen und aus den Gleichungen (13) x und x_1 berechnen, nachdem wir für die a und b die betreffenden Werthe eingesetzt haben. Wir finden:

$$l_1 = -x - \tfrac{1}{3}x_1,$$
$$l_2 = x - \tfrac{1}{3}x_1, \text{ also}$$
$$x_1 = -\tfrac{3}{2}(l_1 + l_2) \text{ und}$$

$$x = \frac{l_2 - l_1}{2}; \text{ demnach:}$$

$$c_1 = \frac{9}{2}(l_1 + l_2)^2 + \frac{(l_2 - l_1)^2}{6}. \tag{43}$$

Die Gleichung (42) lässt uns leicht ein Bild der Bewegung unserer drei Punkte gewinnen, wenn die anfänglichen Geschwindigkeiten derselben 0 sind.

Sie zeigt nämlich, da

$$2x^2 + \tfrac{2}{3}x_1^2 = 2ht^2 + c_1$$
$$= 2h\left(t + \sqrt{\frac{-c_1}{2h}}\right).$$
$$\left(t - \sqrt{\frac{-c_1}{2h}}\right),$$

dass für $t = \sqrt{\frac{-c_1}{2h}}$

$2x^2 + \frac{2}{3}x_1^2$, also auch

x und x_1, mithin auch ξ_1, ξ_2, ξ_3 verschwinden, d. h. dass die 3 Punkte im Schwerpunkte angelangt sind und nun dort in Ruhe verharren. (Da c_1 immer positiv, wie Gleichung (43 zeigt, so muss h negativ sein, weil sonst die Gleichung imaginär würde; alsdann ist t zwischen den Grenzen 0 und $\sqrt{\frac{-c_1}{2h}}$ zu nehmen.)

Hier ist nun der Ort, auf den Fall zurückzukommen, wo die anfänglichen Geschwindigkeiten von Null verschieden sind, wo also auch in Gleichung (39) c nicht verschwindet. Auch hier führt die Integration von (39), d. i. die Gleichung

$$2x^2 + \frac{2x_1^2}{3} = 2ht^2 + ct + c$$

oder $2x^2 + \frac{2x_1^2}{3} =$

$$2h\left(t^2 + \frac{ct + c_1}{2h}\right) =$$

$$2h\left(t + \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^4}{4} - 2hc_1}{2h}\right)\left(t + \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^4}{4} - 2hc_1}{2h}\right) \tag{45}$$

zu einer Vorstellung von der Bewegung der drei Punkte, wenn wir festgesetzt haben, ob $2h$ und c positiv oder negativ; c_1 ist, wie aus Gleichung (43) erhellt, immer positiv.

Sind $2h$ und c positiv, so ist

$$\frac{c}{2} > \sqrt{\frac{c^4}{4} - 2hc_1}$$

$$c > \sqrt{c^2 - 8hc_1},$$

d. h. Gleichung (45) liefert für jeden Werth von t einen bestimmten Werth für x und x_1, mithin auch für ξ_1, ξ_2, ξ_3, d. h. die drei materiellen Punkte treffen nie im Schwerpunkte zusammen, gehen vielmehr immer weiter auseinander, da wir aus obiger Gleichung x_1 als positives oder negatives Vielfaches von x, mithin auch ξ_2 und ξ_3 als positive oder negative Vielfache von ξ_1 darstellen können.

Sind $2h$ und c negativ, so wird

$$\underbrace{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}_{2h} \text{ negativ,}$$

welches wir $\ldots = C \ldots$ setzen wollen, und

$$\underbrace{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}_{2h} = C_1 \text{ positiv,}$$

d. h.
$$2x^2 + \tfrac{2}{3}x_1^2 = 2h(t + C_1)(t - C)$$
$$= -2h(t + C_1)(C - t)$$

und t liegt zwischen den Grenzen 0 und C. Für $t = C$ wird
$$2x^2 + \tfrac{2}{3}x_1^2 = 0,$$
also x und x_1, ξ_1, ξ_2, $\xi_3 = 0$, d. h. zur Zeit $t = C$ liegen die 3 Punkte im Schwerpunkte.

Ist $2h$ positiv, dagegen c negativ, so ist:

$$\underbrace{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}_{2h} = C \text{ negativ,}$$

wenn $2hc \leqq \frac{c^2}{4}$, da

$2hc > \frac{c_2}{4}$, C imaginär machen würde; ebenso ist dann auch:

$$\underbrace{\frac{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}{2h}}_{\text{negativ}} = -C_1,$$

und wir haben in Gleichung (45):

$$2x^2 + \tfrac{2}{3}x_1^2 = 2h(t - C)(t - C_1):$$

da $C > C_1$, so ist $t = C_1$ die Zeit, nach welcher in diesem Falle die 3 Punkte in den Schwerpunkt gelangen: und zwar mit unendlicher Geschwindigkeit, wie die Gleichung (37a) lehrt, in welcher die Nenner wegen $x = x_1 = 0$ verschwinden. Da dasselbe auch für den vorigen Fall gilt, so kommen auch da die 3 Punkte im Schwerpunkte mit unendlich grosser Geschwindigkdit an.

Ist $2h$ negativ, $\frac{c}{2}$ positiv, also

$$\frac{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}{2h} \text{ negativ} = -C$$

und

$$\frac{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - 2hc_1}}{2h} \text{ positiv} = C_1,$$

so lautet Gleichung (45):

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{2x_1^2}{3} &= 2h(t - C)(t + C_1) \\ &= -2h(C - t)(t + C_1), \end{aligned}$$

wo t von 0 bis C wachsen kann, für welchen letztern Zeitpunkt die Punkte wieder im Schwerpunkte angelangt sind.

Wird t, Fall 3 $> C_1$, oder Fall 2, Fall 4 $> C$, so werden die Gleichungen imaginäre, was vielleicht, da die Bewegung in diesen Fällen über den Zeitpunkt hinausgeht, wo die Punkte im Schwerpunkte zusammentreffen, auf eine weitere Bewegung mit dem Schwerpunkte gedeutet werden kann.

So haben wir also auch in diesem allgemeineren Falle gewisse Momente für den Verlauf der Bewegung gewonnen;

wir kehren zu dem specielleren Falle zurück, um hier allgemein für jeden Zeitpunkt die Bewegung zu bestimmen.

Die beiden Gleichungen, die zur Bestimmung der Coordinaten als Functionen der Zeit dienen sollten, sind:

$$(37)\qquad 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\tfrac{2}{3}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=\frac{(3x^2+x_1^2)^2}{4x^2(x^2-x_1^2)^2}+2h$$

$$(38)\qquad x^2+\frac{x_1^2}{3}=ht^2+c_2$$

$c_2=\frac{c_1}{2}$ gesetzt.

Führen wir für:

$ht^2+c_2 : s^2$ ein, also

$$(46)\qquad x^2+\frac{x_1^2}{3}=s^2 \text{ oder}$$

$$3x^2+x_1^2=3s^2,$$

so wird (37) durch diese Substitution und durch Multiplication mit $\frac{3}{2}$ übergehen in:

$$(47)\qquad 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=\frac{27s^4}{8x^2(4x^2-3s^2)^2}+3h.$$

Aus (41) $x\frac{dx}{dt}+\frac{x_1}{3}\frac{dx_1}{dt}=ht$ folgt:

$$(48)\qquad \frac{dx_1}{dt}=\frac{3\left(ht-x\frac{dx}{dt}\right)}{x_1}.$$

Diese Gleichung (48) quadrirt, für $x_1^2 : 3(s^2-x^2)$ substituirt, giebt

$$(49)\qquad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=\frac{9\left(h^2t^2-2htx\frac{dx}{dt}+x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)}{3(s^2-x^2)}.$$

Mithin verwandelt sich durch die Substitutionen für $\frac{dx_1}{dt}$ und für x_1:

$$(47)\qquad 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=\frac{27s^4}{8x^2(4x^2-3s^2)^2}+3h \text{ in:}$$

$$(50)\qquad 9(s^2-x^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+9x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-18htx\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{27s^4(3s^2-3x^2)}{8x^2(4x^2-3s^2)^2}+9h(s^2-x^2)-9h^2t^2,$$

oder vereinfacht:

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{c} s^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2htx\frac{dx}{dt} = \\ \frac{9s^4(s^2-x^2)}{8x^2(4x^2-3s^2)^2} + k(s^2-x^2) - h^2t^2. \end{array}\right.$$

Setzen wir jetzt:

$$(52)\quad x = s\,.\,u, \text{ so wird}$$

$$(53a)\quad \frac{dx}{dt} = s\frac{du}{dt} + u\frac{ds}{dt} \text{ und}$$

$$(53)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = s^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2su\frac{du}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$$

Die aus (52) und aus (53a) und (53) entnommenen Werthe für x, $\frac{dx}{dt}$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ substituiren wir in (51), welches dadurch übergeht in die folgende Gleichung:

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{c} s^4\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + s^2u^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2s^3u\frac{du}{dt}\frac{ds}{dt} \\ - 2hts^2u\frac{du}{dt} - 2htsu^2\frac{ds}{dt} \\ = \\ \frac{9s^4(s^2-s^2u^2)}{8s^2u^2[4s^2u^2+3s^2]^2} + ks^2 - ks^2u^2 - h^2t^2. \end{array}\right.$$

Beachten wir zur Vereinfachung dieser Gleichung noch, dass

$$s = \sqrt{ht^2 + c_2},$$

$$s^2 = ht^2 + c_2 \text{ und}$$

$$s\frac{ds}{dt} = ht,$$

so geht (54) über in:

$$(55a)\quad \left\{\begin{array}{c} s^4\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + h^2t^2u^2 + 2htu^2s\frac{du}{dt} \\ - 2htus^2\frac{du}{dt} - 2h^2t^2u^2 = \\ \frac{9(1-u^2)}{8u^2(4u^2-3)^2} + k(ht^2+c_2) - hu^2(ht^2+c_2) - h^2t^2 \end{array}\right.$$

$$(55)\quad = \frac{9(1-u^2)}{8u^2(4u^2-3)^2} + h^2t^2 + hc_2 - h^2u^2t^2 - hc_2u^2 - h^2t^2,$$

woraus durch Reduction:

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{l} s^4\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \\ \frac{9(1-u^2)}{8u^2(4u^2-3)^2} + hc_2(1-u^2) = \\ \frac{(1-u^2)(9+8hc_2u^2(4u^2-3)^2)}{8u^2(4u^2-3)^2} \text{ folgt.} \end{array}\right.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Wurzeln, so erhalten wir:

$$(57)\quad s^2\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(1-u^2)(9+8hc_2u^2(4u^2-3)^2)}}{\sqrt{8}\,u(4u^2-3)}$$

oder mit Rücksicht auf $s^2 = ht^2 + c_2$,

$$(58)\quad (ht^2+c_2)\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(1-u^2)(9+8hc_2u^2(4u^2-3)^2)}}{\sqrt{8}\,u(4u^2-3)},$$

wodurch wir endlich zur Trennung der Variablen u und t gelangen, nämlich:

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dt}{ht^2+c_2} = \frac{\sqrt{8}\,u(4u^2-3)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(9+8hc_2u^2(4u^2-3)^2)}} \text{ oder} \\ \int\frac{dt}{ht^2+c_2} = \\ \int\frac{\sqrt{8}\,u(4u^2-3)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(9+8hc_2u^2(4u^2-3)^2)}}. \end{array}\right.$$

Da $c_2 = \frac{c_1}{2}$ immer positiv, so ergiebt die Integration der linken Seite der Gleichung leicht:

$$(60)\quad \int\frac{dt}{ht^2+c_2} = \frac{1}{\sqrt{hc_2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{h}}{\sqrt{c_2}} + C.$$

Das Integral rechter Hand lässt sich ebenfalls berechnen. Setzen wir nämlich:

$$(61)\quad 4u^2 - 3 = v,$$

$$\text{also } 8u\,du = dv \text{ und}$$

$$u^2 = \frac{v+3}{4},$$

so verwandelt sich das zweite Integral in (59) in das elliptische Integral:

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{v\,dv}{8\sqrt{\left(1-\frac{v+3}{4}\right)\left(\frac{9+2hc_2(v+3)v^2}{8}\right)}} \\ \text{oder } \displaystyle\int \frac{4\sqrt{2}\,v\,dv}{8\sqrt{(1-v)(9+6hc_2v^2+2hc_2v^3)}} \\ \text{oder } \frac{1}{2}\sqrt{2}\displaystyle\int \frac{v\,dv}{\sqrt{(v-1)(-9-6hc_2v^2-2hc_2v^3)}}. \end{array}\right.$$

Nennen wir die drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$-9-6hc_2v^2-2hc_2v^2=0$$

$$a_1,\ a_2,\ a_3.$$

Falls alle reell sind, sei

$$a_1 < a_2 < a_3;$$

falls eine Wurzel reell, die beiden andern imaginär, sei

$$a_1 = \mu + i\nu$$

$$a_2 = \mu - i\nu.$$

Unser Integral lautet demnach für Fall 1:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{v\,dv}{\sqrt{(v-1)(v-a_1)(v-a_2)(v-a_3)}};$$

für Fall 2:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{v\,dv}{\sqrt{(v-1)(v-a_3)(v-\mu)^2+\nu^2)}}.$$

Beide Integrale lassen sich nach den bekannten Methoden ohne Schwierigkeit auf die Normalformen der elliptischen Integrale zurückführen. Somit können wir unsere Aufgabe als gelöst ansehen, da eine weitere Ausführung durch ein bestimmtes (numerisches) Beispiel ohnehin begrenzt werden müsste.

Vita.

Natus sum Carolus Hoppe Stolpae anno 1845 d. V. mens. Aug. patre Carolo quaestore urbano et matre Johanna e gente Nagel. Fidem confiteor evangelicam.

Gymnasium patriae, quod a V. D. et Cl. Theodore Kock a. 1857 institutum eodem rectore ad annum 1863 atque inde rectore V. D. et Cl. Schütz floruit, frequentavi. Anno 1865 testimonio maturitatis instructus almam adii accademiam Berolinensem, studiis mathematicis et physicis me traditurus.

Per septem semestria, quorum quarto propter malam valetudinem studiis incumbere prohibitus sum, civibus academicis adscriptus fui.

Interfui lectionibus VV. CC. et DD. Kummer, Weierstrass, Arndt, Fuchs, Magnus, Quincke, Schneider, Bona Meyer, Trendelenburg, Karsten. Quibus omnibus, viris optime de me meritis, gratias ago quam maximas.

Postquam examen pro facultate docendi mense XII anno 1869 absolvi, mox ad munus suscipiendum me vocatum iri spero.